ATOMINSTITUT DER ÖSTERREICHISCHEN UNIVERSITÄTEN

Arbeitsbereich Kernphysik und nukleare Astrophysik

Wiedner Hauptstraße 8-10, 5.O.G.-B, A-1040 Wien

Tel +43-1-58801-14201 Fax +43-1-58801-14299 e-mail institut@kph.tuwien.ac.at

ATOMINSTITUT

Übungen

ATOMARE UND SUBATOMARE PHYSIK

LV.Nr. 142.080

7. Zeigen Sie, dass für $\hat{U} = \exp\left(i\hat{H}\right)$ und $\mathrm{Spur}\left(\hat{H}\right) = 0$ die Determinante $\det\left(\hat{U}\right) = 1$ gilt.

8. Zeigen Sie, dass die *SU(2)* Matrizen $\exp\left(i\,{}^{\vartheta}\!/_{2}\,\sigma^1\right)$ und $\exp\left(i\,{}^{\vartheta}\!/_{2}\,\sigma^2\right)$ den Rotationsmatrizen $R_{01}\left(\vartheta\right)$ und $R_{02}\left(\vartheta\right)$ entsprechen. (Hinweis: Der zweite Index entspricht der Achse um die die Drehung erfolgt.)

9. Zeigen Sie, dass die SU(2) Matrix, welche der Rotation $R\left(\psi,\vartheta,\varphi\right)$ entspricht, die folgende Form hat

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{i\varphi/2} & e^{i\psi/2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\varphi/2} \\ -e^{-i\psi/2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{i\varphi/2} & e^{-i\psi/2}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

10. a) Zeigen Sie, dass $\underline{l}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\underline{r}$ wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert.

    b) Beweisen Sie die Identität $\underline{l}^{\dagger}\left(\tilde{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \tilde{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\right)\underline{r} = 2g^{\mu\nu}\,\underline{l}^{\dagger}\underline{r}$

    <u>Hinweis: *l*</u> ist ein linkshändiger Spinor, <u>*r*</u> ist ein rechtshändiger Spinor, die folgend transformieren

    $$\underline{l}' = \hat{M}\underline{l} \quad \text{und} \quad \underline{r}' = \hat{N}\underline{r}\ .$$

11. Zeigen Sie, dass die Lorentztransformation durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\tilde{\sigma}^{\nu}\hat{M}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\hat{M}\right)\ .$$

12. Zeigen Sie, dass

$$\exp\left(-i\frac{1}{2}\phi_i\sigma_i\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2} - i\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\ \sin\frac{\phi}{2}$$

    für jeden Winkel ϕ und jeden Vektor $\vec{\sigma}$ gilt.

13. Schätzen Sie die Masse des Ω^--Teilchens aus den vorhandenen Massen der s=3/2 Baryonen des Dekupletts ab.

    Ruhenergie des Teilchens: mc^2 D: 1236 MeV Y*: 1385 MeV Ξ : 1530 MeV

    Hinweis: Experimentell gefundene Masse ist von W- ist 1672,45 MeV

14. Die Strukturkonstanten der Lie-Algebra der O(3) sind mit dem epsilon-Tensor gegeben

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$$

a) Zeigen Sie die Änderung der Strukturkonstanten, wenn Sie statt $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ die Operatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm iJ_2$ und $\hat{J}_3$ als Generatoren ansetzen.

b) Welchen Wert nehmen die Strukturkonstanten an.

15. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten d_{ijk} symmetrisch sind indem Sie die Relation

$$d_{ijk} = \frac{1}{4}\mathrm{Spur}\left(\left\{\hat{\lambda}_{\mathrm{i}}, \hat{\lambda}_j\right\}\hat{\lambda}_k\right)$$

beweisen.

16. Zeigen Sie, dass für die Strukturkonstanten f_{ijk} eine analoge Relation wie für die d_{ijk} gilt

$$f_{ijk} = \frac{1}{4}\mathrm{Spur}\left(\left[\hat{\lambda}_{\mathrm{i}}, \hat{\lambda}_j\right]\hat{\lambda}_k\right) \ .$$

Ziehen Sie Schlussfolgerungen über die Symmetrie der Strukturkonstanten f_{ijk}.

17. Berechnen Sie zur Einübung mit Hilfe der expliziten Darstellung der $\hat{\lambda}_i$ sowie der in den vorangegangenen Aufgaben abgeleiteten Spurrelationen die Strukturkonstanten f_{156}, f_{458} sowie die Koeffizienten d_{118} und d_{778}.